

3

EQUILIBRI E STABILITÀ

Il problema che vogliamo discutere in questo capitolo è la ricerca di soluzioni stazionarie, o di equilibrio, e lo studio della dinamica nel loro intorno. La classificazione completa del comportamento delle soluzioni nell'intorno di un equilibrio si fonda in primo luogo sul procedimento di linearizzazione, e sullo studio dei sistemi lineari. Su questa base discuteremo poi alcuni aspetti del problema della stabilità.

Lo studio della dinamica nell'intorno dell'equilibrio si svolge, almeno in una prima approssimazione, riconducendosi ad un sistema di equazioni lineari.¹ In tale approssimazione il problema può risolversi in modo completo.

In questo capitolo discutiamo sia l'aspetto analitico, mostrando come si possano scrivere in generale le soluzioni di un sistema lineare a coefficienti costanti, sia la teoria qualitativa sviluppata originariamente da Poincaré^[42]. In questo contesto si inserisce la classificazione dei punti di equilibrio per un sistema piano che costituisce la base per lo studio del caso multidimensionale.

Decisamente più difficile risulta invece lo studio della dinamica del sistema completo (ovvero non approssimato), che qui affrontiamo solo parzialmente discutendo la stabilità alla Lyapounov.²

¹ Lo studio generale di sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti che discutiamo in questo capitolo è stato svolto da Lagrange nella memoria [33]. Lo stesso Lagrange diede poi un'applicazione significativa dei suoi metodi nelle memorie [34] e [35], in cui sviluppò un metodo di calcolo per i moti lenti – detti *secolari* – delle inclinazioni e dei nodi delle orbite planetarie.

² Lo studio analitico di sistemi non lineari è un problema assai vasto e complesso, che ancora è oggetto di studio. In particolare nel caso dei sistemi di interesse nella Meccanica si presentano tipicamente fenomeni di risonanza che possono distorcere le orbite fino a generare una dinamica alquanto complicata. È in questi sistemi che può manifestarsi un comportamento caotico che si presenta anche in equazioni dall'apparenza del tutto innocua. L'esistenza di moti caotici è stata prevista da Poincaré^{[44][45]}, ma la sua scoperta è rimasta praticamente ignota a matematici, fisici ed astronomi, con pochissime eccezioni, fino alla seconda metà del secolo XX. L'esposizione esauriente delle nostre conoscenze in

3.1 La linearizzazione nell'intorno di un equilibrio

Richiamiamo alcune nozioni che abbiamo già introdotto nel capitolo 1. Restiamo ancora nell'ambito dei sistemi autonomi, e consideriamo un sistema di equazioni differenziali

$$(3.1) \quad \dot{x} = f(x)$$

dove $f(x)$ è una funzione a valori vettoriali con dominio in un aperto $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$. Supporremo che la funzione f soddisfi le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità. Una volta scelto un sistema di coordinate scriveremo, ad esempio, $x = (x_1, \dots, x_n)$, e l'equazione (3.1) assumerà la forma di un sistema di n equazioni

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) , \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) . \end{aligned}$$

o, più brevemente,

$$(3.3) \quad \dot{x}_j = f_j(x_1, \dots, x_n) , \quad j = 1, \dots, n .$$

L'incognita è una funzione $x(t)$ che descrive una curva in \mathcal{G} , e che possiamo pensare come applicazione di un intervallo $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ della retta reale in \mathcal{G} . L'*orbita* $\bigcup_{t \in \mathcal{I}} x(t)$ è la curva stessa, considerata globalmente senza curarsi della parametrizzazione col tempo t . La funzione $x(t)$ rappresenta la *legge oraria* o il *movimento*.

Come nel caso delle equazioni in una sola variabile, diremo che \bar{x} è un *punto di equilibrio* se $f(x) = 0$. Diremo poi che $x(t) = \bar{x}$ è una *soluzione stazionaria* o *soluzione di equilibrio* se soddisfa l'equazione (3.1). Vale ancora il risultato della proposizione 2.2: le soluzioni stazionarie sono tutti e soli i punti di equilibrio. La ricerca dei punti di equilibrio si riconduce dunque alla ricerca degli zeri di un campo vettoriale. In generale, questa è la prima operazione da farsi quando si affronta lo studio di un sistema di equazioni differenziali.

3.1.1 Il sistema lineare approssimato

Supponiamo che i secondi membri del sistema di equazioni (3.2) siano funzioni differenziabili, e che il sistema ammetta un punto di equilibrio. Supporremo che tale equilibrio sia nel punto $x = 0$, ricorrendo eventualmente ad una traslazione di coordinate. Scriviamo i secondi membri delle equazioni nell'intorno dell'equilibrio trascurando tutti i

questo campo esula dagli scopi di queste note, dedicate principalmente alla Meccanica Classica.

contributi di ordine superiore al primo. Otteniamo così il sistema lineare

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0)x_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(0)x_n \\
 &\dots \\
 \dot{x}_n &= \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(0)x_1 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(0)x_n
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

o, più brevemente,

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(0)x_k, \quad j = 1, \dots, n.
 \tag{3.5}$$

Qui le derivate devono essere calcolate nel punto di equilibrio. Inoltre i secondi membri delle equazioni non contengono termini costanti perché nell'equilibrio deve essere $f_1(0) = \dots = f_n(0) = 0$.

3.1.2 Equazioni lineari a coefficienti costanti

Ci siamo dunque ricondotti a considerare il sistema di equazioni in \mathbb{R}^n

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x},
 \tag{3.6}$$

dove \mathbf{A} è un operatore lineare.³ Sulla base canonica di \mathbb{R}^n l'operatore \mathbf{A} verrà rappresentato da una matrice quadrata $n \times n$, con elementi reali a_{jk} , e potremo scrivere il sistema nella forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
 \tag{3.7}$$

o, in forma più sintetica,

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^n a_{j,k}x_k.
 \tag{3.8}$$

Nel caso dell'approssimazione lineare delle equazioni nell'intorno di un equilibrio, che costituisce l'oggetto di studio in questo capitolo, l'operatore \mathbf{A} è rappresentato dalla matrice Jacobiana del sistema di funzioni f_1, \dots, f_n valutata in $x = 0$.

La proprietà di linearità del sistema che stiamo considerando ci dà la possibilità di costruire soluzioni mediante *sovrapposizione* di altre soluzioni note. Precisamente, valgono le proprietà

- (i) se $\mathbf{x}(t)$ è soluzione allora anche $\alpha\mathbf{x}(t)$ lo è, per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$;

³ Al fine di evitare sgradevoli confusioni adotteremo qui la convenzione di indicare i vettori col carattere grassetto, e riserveremo il carattere corsivo alle componenti del vettore su una base assegnata. Indicheremo così con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ il vettore le cui componenti sulla base canonica di \mathbb{R}^n sono (x_1, \dots, x_n) .

(ii) se $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{x}'(t)$ sono soluzioni, allora anche $\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}'(t)$ è una soluzione.

Lasciamo al lettore la facile verifica di queste proprietà.

Ci poniamo l'obiettivo di risolvere il problema di Cauchy, ossia di trovare la soluzione soddisfacente la condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, dove $\mathbf{x}_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$ è un qualunque punto di \mathbb{R}^n .

Il caso $n = 1$ è elementare: ci si riduce a considerare l'equazione in dimensione uno $\dot{x} = \lambda x$, che abbiamo già incontrato nei capitoli precedenti.

Il caso $n = 2$, ossia di equazioni nel piano, si presenta in modo naturale come quello di difficoltà immediatamente superiore. È notevole il fatto che, salvo poche eccezioni di cui diremo più avanti, il comportamento dei sistemi multidimensionali si comprende proprio riconducendosi al caso bidimensionale. Per questa ragione ne discutiamo in dettaglio.

3.2 Classificazione dei punti di equilibrio nel piano

Per evitare la proliferazione di indici indicheremo con x, y le componenti del vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ sulla base canonica. Scriveremo inoltre le equazioni per le coordinate x, y nella forma

$$(3.9) \quad \dot{x} = ax + by, \quad \dot{y} = cx + dy,$$

ovvero, in forma più sintetica,

$$(3.10) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

dove a, b, c, d sono gli elementi della matrice che rappresenta l'operatore \mathbf{A} sulla base canonica

3.2.1 Il metodo della separazione delle variabili

Cerchiamo delle soluzioni fattorizzate come $\mathbf{x}(t) = T(t)\mathbf{w}$, dove \mathbf{w} è un vettore fissato e $T(t)$ è una funzione del tempo da determinarsi. Il nome *separazione delle variabili* dato a questo metodo deriva proprio dall'aver scritto la soluzione come prodotto di una componente spaziale con una temporale. Si tratta di un metodo interessante perché ci consente di arrivare rapidamente alla scrittura delle soluzioni nei casi più semplici. Inoltre lo stesso metodo viene applicato anche per la soluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali, ed è quindi utile conoscerlo. Apparentemente il metodo è in grado di fornire solo soluzioni di forma speciale, ma la linearità delle equazioni ci permetterà di costruire la soluzione generale mediante combinazioni lineari di quelle note.

Procediamo dunque sostituendo nell'equazione una soluzione della forma che stiamo cercando. Per la linearità dell'operatore di derivata vale $\frac{d}{dt}(T(t)\mathbf{w}) = \dot{T}(t)\mathbf{w}$, e per la linearità dell'operatore \mathbf{A} vale $\mathbf{A}(T(t)\mathbf{w}) = T(t)\mathbf{A}\mathbf{w}$. Ricaviamo dunque l'equazione

$$(3.11) \quad \dot{T}(t)\mathbf{w} = T(t)\mathbf{A}\mathbf{w}.$$

Dividendo per $T(t)$ (che non deve essere identicamente nullo, perché se lo fosse ci darebbe semplicemente il punto di equilibrio) abbiamo $\frac{\dot{T}(t)}{T(t)}\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{w}$, e poiché il termine di destra è indipendente dal tempo desumiamo che il rapporto \dot{T}/T deve essere anch'esso una costante indipendente dal tempo, che indicheremo con λ . Possiamo dunque spezzare l'equazione (3.11) nel sistema

$$(3.12) \quad \mathbf{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w} , \quad \dot{T} = \lambda T .$$

La prima equazione è ben nota dalla geometria: si tratta infatti dell'equazione agli autovalori. Le soluzioni λ e \mathbf{w} vengono dette rispettivamente *autovalori* ed *autovettori* di \mathbf{A} . Naturalmente siamo interessati a soluzioni non banali, ossia con $\mathbf{w} \neq 0$, mentre potrà essere $\lambda = 0$.

Rimandando per un momento la discussione dell'equazione agli autovalori supponiamo di aver determinato una radice λ . Sostituiamo questo valore nella seconda delle equazioni (3.12). La soluzione è semplice:

$$(3.13) \quad T(t) = T_0 e^{\lambda t} ,$$

dove T_0 è una costante arbitraria. Nel caso $\lambda = 0$ la soluzione è semplicemente una costante. Nel caso $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ questo ci basta. Ma l'equazione agli autovalori può avere anche radici complesse coniugate, e questo richiederà una discussione più approfondita.

3.2.2 L'equazione agli autovalori in dimensione 2

Nel caso $n = 2$, tenuto conto della forma (3.10) della matrice \mathbf{A} , l'equazione agli autovalori assumerà la forma

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0 ,$$

ovvero, in forma più elegante e facile da ricordare,

$$(3.14) \quad \lambda^2 - \lambda \operatorname{Tr} \mathbf{A} + \det \mathbf{A} = 0 ,$$

dove $\operatorname{Tr} \mathbf{A} = a + d$ è la somma degli elementi diagonali della matrice, e $\det \mathbf{A} = ad - bc$ è il determinante.⁴

Trattandosi di un'equazione di secondo grado sappiamo bene che occorre tener conto del segno del discriminante

$$(3.15) \quad \Delta = (\operatorname{Tr} \mathbf{A})^2 - 4 \det \mathbf{A}$$

Dovremo dunque discutere separatamente i tre casi

- (i) $\Delta > 0$: due radici reali e distinte;
- (ii) $\Delta < 0$: due radici complesse coniugate;
- (iii) $\Delta = 0$: il caso degenero di due radici reali e coincidenti;

⁴ È noto dalla geometria che la traccia ed il determinante sono indipendenti dalla rappresentazione, e dunque sono quantità che dobbiamo pensare associate all'operatore, e non alla matrice che lo rappresenta.

3.2.3 I punti di nodo e di sella

Supponiamo anzitutto che si abbia $\Delta > 0$, sicché gli autovalori della matrice \mathbf{A} sono reali e distinti, e precisamente

$$(3.16) \quad \lambda_1 = \frac{\text{Tr } \mathbf{A} + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\text{Tr } \mathbf{A} - \sqrt{\Delta}}{2};$$

non si esclude che uno dei due autovalori possa annullarsi. Possiamo determinare due autovettori corrispondenti rispettivamente agli autovalori λ_1, λ_2 . Si noti che gli autovettori sono determinati a meno di un fattore moltiplicativo, dato che devono essere elementi del nucleo dell'operatore $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ con λ che assume uno dei due valori λ_1, λ_2 . Questo corrisponde al fatto *algebrico* che gli autovettori sono soluzione di un sistema lineare omogeneo, ed al fatto *geometrico* che essi sono vettori di direzione di rette *unite*. La proprietà rilevante è che gli autovettori, essendo associati ad autovalori distinti, sono indipendenti.⁵

L'espressione esplicita degli autovettori si ricava facilmente in termini degli elementi di matrice della (3.9). Infatti l'equazione agli autovalori si spezza nelle due equazioni

$$(a - \lambda)w_x + bw_y = 0, \quad cw_x + (d - \lambda)w_y = 0,$$

che non sono indipendenti se al posto di λ si sostituisce uno dei due autovalori λ_1, λ_2 che abbiamo determinato. Come soluzioni possiamo scegliere, ad esempio, tra⁶

$$(3.17) \quad \begin{aligned} w_x &= b, & w_y &= \lambda - a & \text{per } b \neq 0, \\ w_x &= \lambda - d, & w_y &= c & \text{per } c \neq 0. \end{aligned}$$

Sostituendo in queste espressioni i due autovalori λ_1 e λ_2 (che abbiamo supposto distinti) e supponendo ad esempio che si abbia $b \neq 0$, otteniamo i due autovettori

$$(3.18) \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_2 - a \end{pmatrix}$$

che soddisfano rispettivamente le equazioni $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{u}$ e $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda_2\mathbf{v}$. Per $b = 0$ e $c \neq 0$ si usa in modo ovvio la seconda riga delle (3.17). Per $b = c = 0$ invece non dobbiamo fare nulla: la matrice \mathbf{A} è diagonale, gli autovalori sono $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = d$, e gli autovettori sono $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

⁵ Supponiamo che siano dipendenti; allora sarà inevitabilmente $\mathbf{u} - \alpha\mathbf{v} = 0$ con $\alpha \neq 0$, e quindi anche $\mathbf{A}(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}) = \lambda_1\mathbf{u} - \lambda_2\alpha\mathbf{v} = (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{u} = 0$. Poiché $\mathbf{u} \neq 0$, segue che deve essere $\lambda_1 = \lambda_2$, e questo contraddice l'ipotesi che gli autovalori siano distinti. Si osservi che l'argomento si applica anche al caso in cui uno dei due autovalori si annulli.

⁶ Naturalmente gli autovettori così determinati differiscono tra loro solo per un fattore moltiplicativo reale. La scelta tra le due soluzioni è arbitraria, salvo nel caso in cui si abbia $b = 0$ o $c = 0$. In fatti se si verifica uno di questi casi allora si annulla necessariamente anche una delle espressioni $\lambda - a$ e $\lambda - d$, e dunque una delle soluzioni proposte potrebbe essere nulla, e come tale inutile.

Ricordando la discussione del paragrafo 3.2.1 possiamo scrivere una soluzione generale del problema come sovrapposizione delle due soluzioni corrispondenti ai due autovalori, ottenendo così nella forma

$$(3.19) \quad \mathbf{x}(t) = \alpha \mathbf{u} e^{\lambda_1 t} + \beta \mathbf{v} e^{\lambda_2 t}$$

con coefficienti α, β arbitrari.

Mostriamo ora che il problema di Cauchy ammette soluzione per qualunque dato iniziale \mathbf{x}_0 . A tal fine basta mostrare come si determinano le costanti α e β in modo che la condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ sia soddisfatta. Infatti ponendo $t = 0$ nella (3.19) si ottiene l'equazione

$$\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} = \mathbf{x}_0 .$$

Introducendo le componenti dei vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} sulla base canonica otteniamo l'equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} ,$$

che nel caso che stiamo considerando ammette certamente una soluzione unica. Vediamo dunque che il problema di Cauchy è completamente risolto.⁷

Archiviata così la soluzione analitica del problema, passiamo a discutere l'andamento qualitativo delle orbite, che è anche più interessante della soluzione esplicita. Se denotiamo con (ξ, η) le componenti di un vettore \mathbf{x} sulla base \mathbf{u}, \mathbf{v} vediamo subito che queste devono soddisfare l'equazione

$$(3.20) \quad \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} , \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} .$$

con la matrice Λ diagonale. Dobbiamo dunque considerare le equazioni separate

$$(3.21) \quad \dot{\xi} = \lambda_1 \xi , \quad \dot{\eta} = \lambda_2 \eta .$$

con le soluzioni, che ormai ben conosciamo,

$$(3.22) \quad \xi(t) = \xi_0 e^{\lambda_1 t} , \quad \eta(t) = \eta_0 e^{\lambda_2 t} .$$

Rappresentiamo le orbite riferendoci ad assi cartesiani ortogonali sui quali rappresentiamo le coordinate ξ, η . Si osserva subito che gli assi sono invarianti per il movimento. In effetti, ciò è banale conseguenza del fatto che le due equazioni sono separate, e ciascuna di esse ammette lo zero come equilibrio. È forse meno banale osservare che i due assi rappresentano in realtà cinque orbite distinte: una è l'origine, che essendo un punto stazionario è anche un'orbita, e le altre quattro sono i due semiassi positivi ed i due negativi. Ciò è consistente col teorema di unicità delle soluzioni: le orbite che

⁷ Il lettore avrà certamente notato che questa operazione altro non è che la ricerca delle componenti del vettore iniziale \mathbf{x}_0 sulla base \mathbf{u}, \mathbf{v} degli autovettori. Il ritorno alle coordinate iniziali è implicito nel fatto che gli autovettori sono già scritti mediante le loro componenti sulla base canonica. Di fatto, il procedimento geometrico di normalizzazione e quello più immediato di separazione delle variabili conducono a risolvere le stesse equazioni algebriche. Il che, del resto, era da aspettarsi.

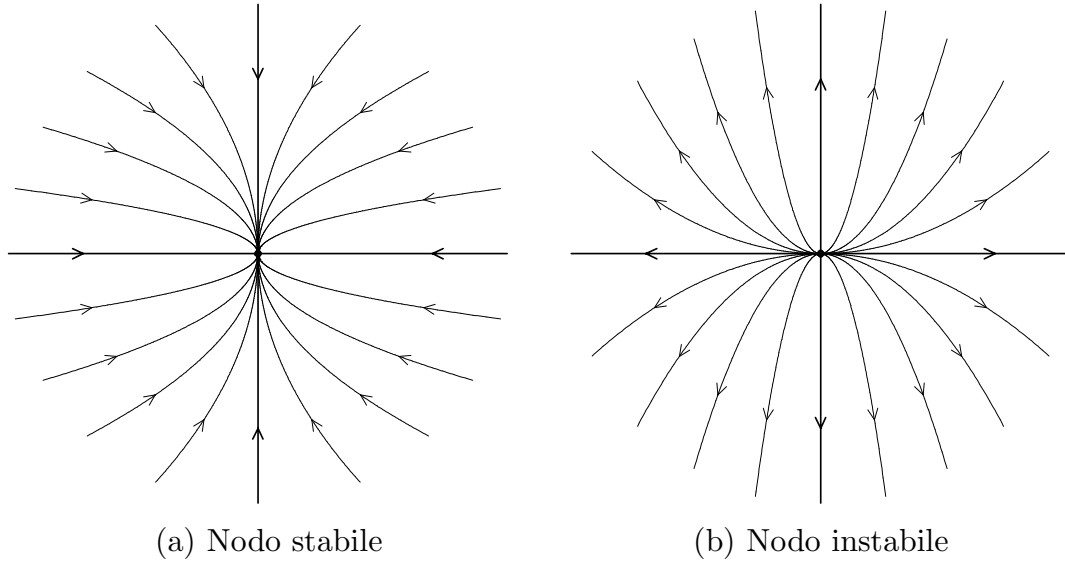


Figura 3.1. L'andamento delle orbite nel piano di fase nel caso di autovalori reali, distinti e con lo stesso segno. Si dice che si ha un *nodo*. Si osservi che tutte le orbite sono tangenti ad uno degli assi, ad eccezione di quelle che hanno dato iniziale sull'altro asse.

hanno inizio in punti diversi dall'origine possono solo tendervi asintoticamente per $t \rightarrow +\infty$ in caso di autovalore negativo, o per $t \rightarrow -\infty$ in caso di autovalore positivo.

Questo è già sufficiente per stabilire che nessun'altra orbita potrà intersecare gli assi. Se ciò accadesse infatti si avrebbe un punto dal quale si dipartono più soluzioni, in contrasto col teorema di unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali.

Per studiare in modo più completo l'andamento delle orbite in tutto il piano dobbiamo distinguere tre casi:

- (i) autovalori con lo stesso segno;
- (ii) autovalori con segni opposti;
- (iii) uno dei due autovalori si annulla.

(i) *Autovalori con lo stesso segno.* Per studiare l'andamento delle orbite indipendentemente dal tempo possiamo cercare una funzione $\eta(\xi)$ che rappresenti direttamente le curve, almeno localmente. A tal fine eliminiamo il tempo dalle soluzioni (3.22), e per la curva che passa per il punto (ξ_0, η_0) otteniamo l'equazione

$$(3.23) \quad \frac{\eta}{\eta_0} = \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{\lambda_2/\lambda_1}$$

Osserviamo che sia la base che l'esponente del termine di destra sono positivi (le orbite non possono attraversare gli assi). Non è difficile rappresentare le orbite sul piano di fase ed ottenere i grafici della figura 3.1. Il caso (a) si verifica se gli autovalori soddisfano $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Il caso (b) si verifica se $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. È interessante notare che tutte le orbite entrano nell'origine avendo come tangente uno degli assi, con la sola eccezione dell'altro asse. Ciò perché l'autovalore maggiore in valore assoluto tende a

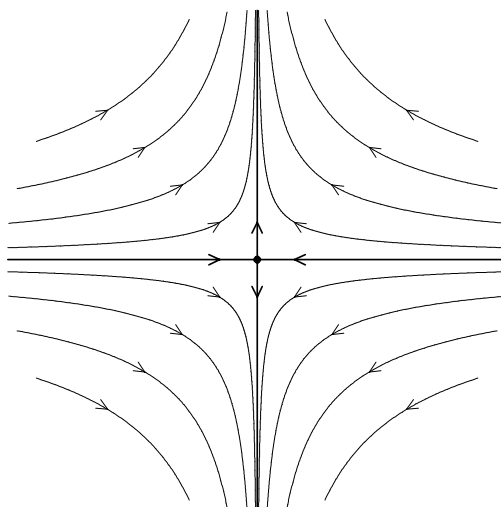


Figura 3.2. Il caso del punto di sella.

schiacciare l'orbita più rapidamente dell'altro.

Per un punto di equilibrio di questo genere Poincaré ha usato il nome *noeud*, comunemente tradotto in *nodo*, rispettivamente stabile ed instabile.^[43]

(ii) *Autovalori con segni opposti.* La formula (3.23) resta ancora valida, ed è facile tracciare la figura 3.2. Le frecce mettono in evidenza l'andamento del flusso nel caso $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Si osserverà che questa volta l'origine ha un comportamento singolare: ad eccezione delle orbite che giacciono sugli assi, tutte le altre provengono dall'infinito avendo come asintoto l'asse ξ (orizzontale) e tornano all'infinito avendo come asintoto l'asse η (verticale). È interessante notare, guardando la figura, che punti molto vicini tra loro ma giacenti da lati opposti rispetto all'asse ξ vengono separati rapidamente dalla dinamica quando arrivano in vicinanza dell'origine, ed inviati all'infinito in direzioni opposte. Rovesciando la direzione del tempo (e quindi la direzione delle frecce nella figura) lo stesso accade a punti vicini all'asse η .

Per un punto di equilibrio di questo genere Poincaré ha usato il nome *col*, tradotto solitamente in *sella* o talvolta anche *colle*. Noi faremo uso del termine *sella*.

(iii) *Il caso di un autovalore nullo.* Questo caso è ancora più semplice dei precedenti. Assumendo che sia $\lambda_2 = 0$ consideriamo il sistema

$$(3.24) \quad \begin{aligned} \dot{\xi} &= \lambda_1 \xi, & \dot{\eta} &= 0, \end{aligned}$$

e le soluzioni sono

$$(3.25) \quad \xi(t) = \xi_0 e^{\lambda_1 t}, \quad \eta(t) = \eta_0.$$

L'asse ξ è interamente formato da soluzioni stazionarie. Tutte le altre orbite sono semirette parallele all'asse η che incontrano l'asse ξ in un punto stazionario. Il flusso su ciascuna orbita tende esponenzialmente al punto stazionario per $t \rightarrow +\infty$ se $\lambda_1 < 0$ o per $t \rightarrow -\infty$ se $\lambda_1 > 0$. È un caso degenerare al quale non sono stati riservati nomi particolari.

3.2.4 I punti di fuoco e centro

Passiamo ora a discutere il caso $\Delta < 0$, sicché si hanno due autovalori complessi coniugati che scriveremo nella forma

$$(3.26) \quad \lambda = \mu + i\omega, \quad \lambda^* = \mu - i\omega, \quad \mu = \frac{\text{Tr } A}{2}, \quad \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

Per la ricerca degli autovettori dobbiamo momentaneamente accettare di considerare vettori complessi, che scriveremo nella forma $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$, con \mathbf{u}, \mathbf{v} vettori reali. L'osservazione utile è che se \mathbf{w} è l'autovettore associato all'autovalore λ , allora \mathbf{w}^* è l'autovettore associato all'autovalore λ^* . Ciò si dimostra semplicemente coniugando l'equazione $A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$; infatti, ricordando che A è reale, si ha $(A\mathbf{w})^* = A\mathbf{w}^*$, ed anche $(\lambda\mathbf{w})^* = \lambda^*\mathbf{w}^*$, da cui si ricava $A\mathbf{w}^* = \lambda^*\mathbf{w}^*$, come asserito.

Anche qui è facile ricavare la forma esplicita degli autovettori facendo di nuovo ricorso ad una delle equazioni (non indipendenti)

$$(a - \lambda)w_x + bw_y = 0, \quad cw_x + (d - \lambda)w_y = 0,$$

dove però dovremo sostituire le espressioni complesse $w_x = u_x + iv_x$ e $w_y = u_y + iv_y$, oltre a $\lambda = \mu + i\omega$. Separando la parte reale dell'equazione da quella immaginaria ricaviamo la soluzione in una delle due forme⁸

$$\begin{aligned} u_x = b, \quad u_y = \mu - a, \quad v_x = 0, \quad v_y = \omega, \\ u_x = \mu - d, \quad u_y = c, \quad v_x = \omega, \quad v_y = 0. \end{aligned}$$

Mostriamo ora come si possa costruire una base reale, rinunciando però alla forma diagonale della matrice. Allo stesso tempo ricaveremo la soluzione generale. Separiamo la parte reale \mathbf{u} e la parte immaginaria \mathbf{v} degli autovettori, ponendo

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{w} + \mathbf{w}^*}{2}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{w} - \mathbf{w}^*}{2i},$$

e ricordando la (3.26) calcoliamo

$$\begin{aligned} A\mathbf{u} &= \frac{\lambda\mathbf{w} + \lambda^*\mathbf{w}^*}{2} = \mu \frac{\mathbf{w} + \mathbf{w}^*}{2} + i\omega \frac{\mathbf{w} - \mathbf{w}^*}{2} = \mu\mathbf{u} - \omega\mathbf{v}, \\ A\mathbf{v} &= \frac{\lambda\mathbf{w} - \lambda^*\mathbf{w}^*}{2i} = \mu \frac{\mathbf{w} - \mathbf{w}^*}{2i} + i\omega \frac{\mathbf{w} + \mathbf{w}^*}{2i} = \omega\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Il fatto interessante è che \mathbf{u}, \mathbf{v} sono linearmente indipendenti⁹ sicché possono essere utilizzati come base. Osserviamo che i vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} sono reali. Inoltre, per quanto

⁸ La soluzione non è unica, perché è determinata a meno di un fattore moltiplicativo arbitrario, anche complesso. Ad esempio, moltiplicando sia w_x che w_y per $e^{i\gamma}$ si ottiene la famiglia di vettori $u_x = b \cos \gamma$, $u_y = (\mu - a) \cos \gamma - \omega \sin \gamma$, $v_x = b \sin \gamma$, $v_y = (\mu - a) \sin \gamma + \omega \cos \gamma$. Le due soluzioni suggerite differiscono per un fattore di questo tipo, oltre che per un fattore di scala. Si noti che b, c sono necessariamente non nulli; infatti, se uno dei due fosse zero avremmo a che fare con una matrice triangolare, che avrebbe autovalori reali.

⁹ Osserviamo anzitutto che i vettori complessi \mathbf{w}, \mathbf{w}^* sono linearmente indipendenti sui numeri complessi, perché gli autovalori λ, λ^* sono distinti (si applica l'argomento già

abbiamo appena visto, sulla base \mathbf{u}, \mathbf{v} l'operatore \mathbf{A} è rappresentato dalla matrice

$$(3.27) \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \mu & \omega \\ -\omega & \mu \end{pmatrix}.$$

Denotando ancora con ξ, η le coordinate sulla base dei vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} avremo dunque le equazioni

$$(3.28) \quad \dot{\xi} = \mu\xi + \omega\eta, \quad \dot{\eta} = -\omega\xi + \mu\eta.$$

Questa è la forma più semplice assunta dal sistema se si vogliono considerare solo quantità reali.

Veniamo ora alla scrittura delle soluzioni. A tal fine conviene far uso ancora per un momento di quantità complesse. Grazie alla linearità delle equazioni possiamo ancora combinare linearmente le soluzioni $\mathbf{w} e^{\lambda t}$, $\mathbf{w}^* e^{\lambda^* t}$, ma dovremo farlo con coefficienti complessi α, β , ossia

$$(3.29) \quad \mathbf{x}(t) = \alpha \mathbf{w} e^{\lambda t} + \beta \mathbf{w}^* e^{\lambda^* t}.$$

Si osserverà che l'arbitrarietà dei coefficienti sembra eccessiva, perché si avrebbero quattro quantità da determinarsi. Dobbiamo però ricordare che siamo alla ricerca di soluzioni reali, il che implica che le costanti α, β debbano essere complesse coniugate, ovvero che $\beta = \alpha^*$. È conveniente passare alla notazione esponenziale dei numeri complessi, scrivendo $\alpha = \frac{\varrho}{2} e^{i\varphi}$, $\beta = \frac{\varrho}{2} e^{-i\varphi}$, sicché le quantità da determinarsi sono ora ϱ, φ . Scriveremo dunque la forma generale della soluzione come

$$(3.30) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \frac{\varrho}{2} \mathbf{w} e^{(\mu+i\omega+i\varphi)t} + \frac{\varrho}{2} \mathbf{w}^* e^{(\mu-i\omega-i\varphi)t} \\ &= \varrho e^{\mu t} \cos(\omega t + \varphi) \frac{\mathbf{w} + \mathbf{w}^*}{2} + i \varrho e^{\mu t} \sin(\omega t + \varphi) \frac{\mathbf{w} - \mathbf{w}^*}{2} \\ &= \varrho e^{\mu t} (\mathbf{u} \cos(\omega t + \varphi) - \mathbf{v} \sin(\omega t + \varphi)), \end{aligned}$$

dove abbiamo denotato rispettivamente con \mathbf{u} e \mathbf{v} la parte reale ed immaginaria dell'autovettore complesso \mathbf{w} .

Mostriamo ora che la forma (3.30) della soluzione ci consente di risolvere completamente il problema di Cauchy. Facciamo ancora uso della forma complessa della soluzione generale come espressa dalla formula (3.29) con $\beta = \alpha^*$, e scriviamo la condizione iniziale (per $t = 0$) come equazione per la parte reale ed immaginaria di α

$$\mathbf{x}_0 = \alpha \mathbf{w} + \alpha^* \mathbf{w}^* = 2 \operatorname{Re} \alpha \mathbf{u} - 2 \operatorname{Im} \alpha \mathbf{v}.$$

In coordinate l'equazione assume la forma più esplicita

$$\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \alpha \\ -\operatorname{Im} \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

visto per i reali). Per assurdo, supponiamo che sia $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{v}$ con α reale e non nullo. Allora si avrebbe $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v} = (\alpha + i)\mathbf{v}$, ed analogamente $\mathbf{w}^* = (\alpha - i)\mathbf{v}$, sicché sarebbe $\mathbf{w} = \frac{\alpha+i}{\alpha-i} \mathbf{w}^*$, in contrasto con l'indipendenza lineare degli autovalori complessi.

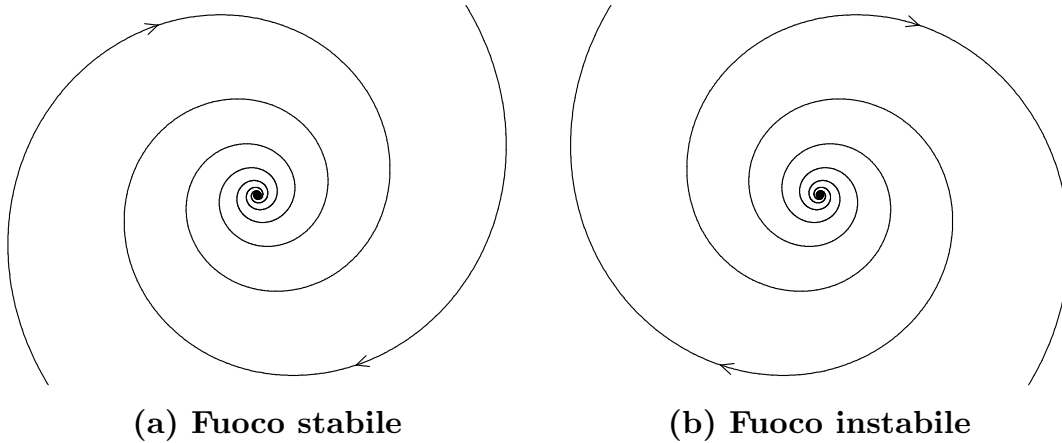


Figura 3.3. L'andamento delle orbite nel piano di fase nel caso di autovalori complessi coniugati con parte reale non nulla. Si dice che si ha un *fuoco*.

Basta ora determinare α da queste equazioni e calcolarne il modulo ϱ e l'argomento φ da sostituire nella (3.30). Si trova così la soluzione completa del problema di Cauchy.

Veniamo ora allo studio dell'andamento qualitativo delle orbite. Qui conviene senz'altro far uso delle coordinate ξ, η sulla base \mathbf{u}, \mathbf{v} , che obbediscono alle equazioni (3.28). Le soluzioni sono semplicemente le componenti della soluzione generale (3.30) sulla base \mathbf{u}, \mathbf{v} , ossia

$$(3.31) \quad \xi(t) = \varrho e^{\mu t} \cos(\omega t + \varphi), \quad \eta(t) = -\varrho e^{\mu t} \sin(\omega t + \varphi).$$

Discutiamo separatamente i due casi, $\mu \neq 0$ e $\mu = 0$.

Nel caso $\mu \neq 0$ il flusso è una rotazione con velocità angolare ω intorno all'origine, ma l'ampiezza della rotazione è modulata dalla funzione esponenziale $e^{\mu t}$. Si ha dunque un'ampiezza che decresce asintoticamente a zero per $t \rightarrow +\infty$ se $\mu < 0$, e per $t \rightarrow -\infty$ se $\mu > 0$. L'andamento delle orbite nel piano di fase è rappresentato in figura 3.3. La rotazione avviene in senso orario a causa del segno negativo nell'espressione per $\eta(t)$.

Per un punto di equilibrio di questo genere Poincaré ha usato il nome *foyer*, solitamente tradotto con *fuoco*, rispettivamente stabile ed instabile.

Nel caso $\mu = 0$ l'ampiezza della rotazione resta costante, e le orbite nel piano di fase hanno l'andamento illustrato in figura 3.4. Vedremo che questo caso è particolarmente interessante per i sistemi conservativi. Per un punto di equilibrio di questo genere Poincaré ha usato il nome *centre*, solitamente tradotto con *centro*.

Nello studio delle orbite è comodo anche ricorrere a coordinate polari, mediante la trasformazione

$$\xi = r \cos \vartheta, \quad \eta = r \sin \vartheta.$$

Qui dobbiamo scrivere le equazioni per le nuove coordinate. Derivando rispetto al tempo abbiamo

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix}.$$

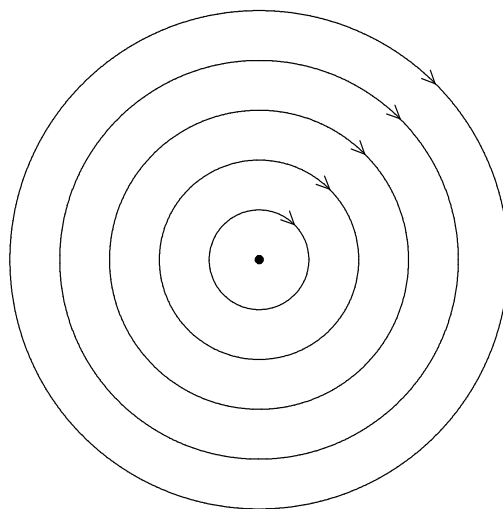


Figura 3.4. L'andamento delle orbite nel piano di fase nel caso di autovalori puramente immaginari. Si dice che si ha un *centro*.

Invertendo la matrice e sostituendo tutte le espressioni trovate nella (3.28) otteniamo il sistema

$$\dot{r} = \mu r, \quad \dot{\vartheta} = -\omega.$$

Le soluzioni si trovano immediatamente:

$$r = r_0 e^{\mu t}, \quad \vartheta = \vartheta_0 - \omega t,$$

dove r_0 e ϑ_0 sono i dati iniziali. Da qui è particolarmente evidente che il movimento è una rotazione con velocità angolare ω costante, composta con una variazione esponenziale del raggio. Eliminando il tempo tra le due equazioni si trova l'espressione dell'orbita

$$r = r_0 e^{-\mu(\vartheta - \vartheta_0)/\omega}.$$

Nel caso $\mu \neq 0$ questa curva è detta *spirale logaritmica*.

3.2.5 I casi di degenerazione degli autovalori

Veniamo infine a discutere il caso $\Delta = 0$, in cui si hanno due autovalori reali e coincidenti

$$(3.32) \quad \lambda = \frac{\text{Tr } \mathbf{A}}{2}.$$

Questo caso è più infido dei precedenti, perché la soluzione dipende dalla dimensione del nucleo¹⁰ dell'operatore $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$.

Sbarazziamoci anzitutto del caso in cui il nucleo abbia dimensione 2, ovvero sia tutto lo spazio. Si tratta di un caso totalmente banale, perché si ha $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{w} = 0$ qualunque sia \mathbf{w} . Dunque, ogni vettore del piano è autovettore dell'operatore \mathbf{A} , e la

¹⁰ Ricordiamo che il *nucleo* (o *kernel*) di un operatore \mathbf{B} è l'immagine inversa del vettore nullo, ovvero l'insieme $\{\mathbf{x} : \mathbf{B}\mathbf{x} = 0\}$, che è un sottospazio.

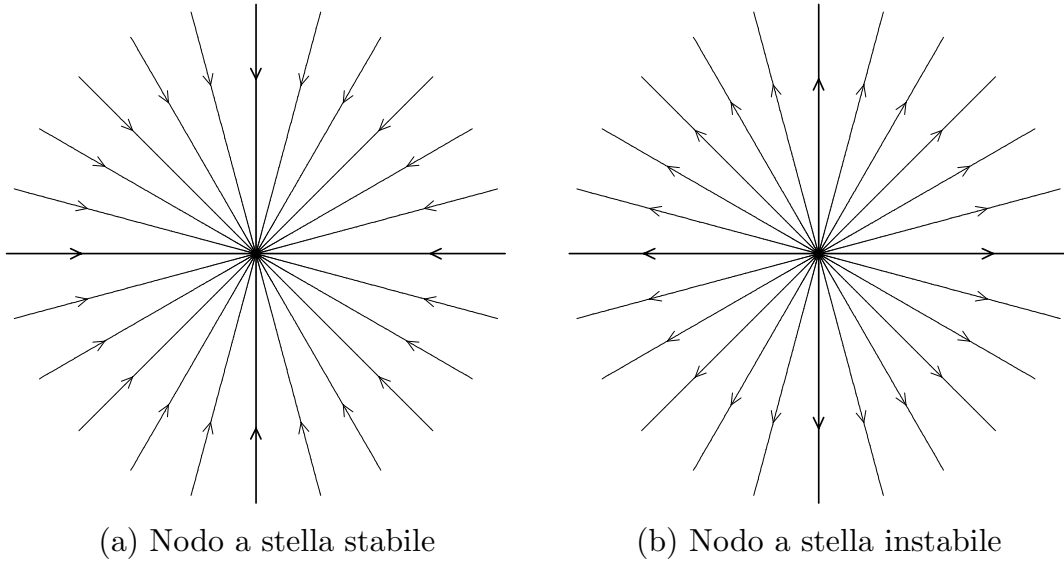


Figura 3.5. L'andamento delle orbite nel piano di fase nel caso di autovalori reali e coincidenti con degenerazione degli autovettori a tutto il piano. Si dice che si ha un *nodo a stella*.

matrice A ha già una forma diagonale su qualunque base. In altre parole, la matrice ha già la forma

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

La discussione delle soluzioni diventa quindi una ripetizione di quanto è stato detto nel paragrafo 3.2.3, salvo il fatto che non vi sono trasformazioni di coordinate da eseguire. Il solo cambiamento sta nell'andamento delle orbite sul piano di fase, che diventa quello rappresentato in figura 3.5

Il caso in cui il nucleo abbia dimensione uno richiede un po' più di attenzione. L'operatore A ha un solo autovettore \mathbf{u} , che possiamo ben determinare. Scegliamo arbitrariamente un secondo vettore \mathbf{w} che sia linearmente indipendente da \mathbf{u} , sicché la coppia \mathbf{u}, \mathbf{w} è una base nel piano. Allora avremo

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \quad A\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \mu\mathbf{w},$$

con dei coefficienti α, μ che potremmo determinare; la prima eguaglianza è vera perché \mathbf{u} è autovettore di A ; d'altra parte è certamente possibile scomporre il vettore $A\mathbf{w}$ sulla base \mathbf{u}, \mathbf{w} , e dunque sussiste anche la seconda eguaglianza. Ne segue che sulla base \mathbf{u}, \mathbf{w} l'operatore A ammette la rappresentazione

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Poiché la matrice ha una forma triangolare, gli autovalori sono gli elementi della diagonale, e dunque deve essere $\mu = \lambda$. Inoltre, sostituendo il vettore \mathbf{w} con $\mathbf{v} = \mathbf{w}/\alpha$ si ottiene $A\mathbf{v} = \mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$, ossia si forza $\alpha = 1$. Ne concludiamo che esiste una base su

cui la matrice Λ assume la forma

$$(3.33) \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} .$$

Se vogliamo determinare esplicitamente i vettori della base dobbiamo anzitutto risolvere l'equazione

$$(a - \lambda)u_x + bu_y = 0, \quad cu_x + (d - \lambda)u_y = 0 .$$

Osserviamo che b e c non possono essere contemporaneamente nulli (il sistema sarebbe già in forma diagonale). La soluzione quindi è quella che abbiamo già visto nel caso di autovalori reali, e che riscriviamo:

$$\begin{aligned} u_x &= b, & u_y &= \lambda - a & \text{per } b \neq 0, \\ u_x &= \lambda - d, & u_y &= c & \text{per } c \neq 0. \end{aligned}$$

Per determinare il secondo vettore \mathbf{v} dobbiamo risolvere l'equazione non omogenea $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{u}$, e troviamo facilmente la soluzione particolare

$$\begin{aligned} v_x &= 0, & v_y &= 1 & \text{per } b \neq 0, \\ v_x &= 1, & v_y &= 0 & \text{per } c \neq 0. \end{aligned}$$

Questa soluzione non è unica: possiamo sempre sommarle un multiplo arbitrario di \mathbf{u} .

Veniamo ora alla costruzione esplicita delle soluzioni delle equazioni, che qui è di poco più elaborata. Assumiamo anzitutto $\lambda \neq 0$. Sulla base \mathbf{u}, \mathbf{v} il sistema si scrive

$$\dot{\xi} = \lambda\xi + \eta, \quad \dot{\eta} = \lambda\eta .$$

Conosciamo già la soluzione generale della seconda equazione, $\eta(t) = \eta_0 e^{\lambda t}$, dove η_0 è il dato iniziale. Possiamo dunque riscrivere la prima equazione come

$$\dot{\xi} = \lambda\xi + \eta_0 e^{\lambda t} ,$$

che è un'equazione *non omogenea*. Sappiamo che la soluzione generale di questa equazione è somma di una qualsiasi soluzione dell'equazione omogenea con la soluzione generale dell'equazione omogenea associata. Per la ricerca della soluzione dell'equazione completa possiamo far uso del metodo di Lagrange di variazione delle costanti. Cerchiamo cioè una soluzione della forma $\xi(t) = \psi(t) e^{\lambda t}$, sostituendo la costante arbitraria che compare nella soluzione dell'equazione omogenea con una funzione incognita del tempo $\psi(t)$. Per sostituzione nell'equazione ricaviamo $\dot{\psi} e^{\lambda t} + \lambda\psi e^{\lambda t} = \lambda\psi e^{\lambda t} + \eta_0 e^{\lambda t}$, e dunque $\psi(t)$ deve soddisfare $\dot{\psi} = \eta_0$. Abbiamo dunque $\psi(t) = \eta_0 t$ (basta una soluzione), e concludiamo che la soluzione generale del sistema avrà la forma

$$(3.34) \quad \xi(t) = \xi_0 e^{\lambda t} + \eta_0 t e^{\lambda t}, \quad \eta(t) = \eta_0 e^{\lambda t} .$$

Le costanti arbitrarie ξ_0, η_0 sono le coordinate del punto iniziale sulla base \mathbf{u}, \mathbf{v} , che ormai sappiamo bene come determinare; dunque il problema di Cauchy è completamente risolto.

Veniamo infine alla rappresentazione delle orbite sul piano di fase, che facciamo ancora riferendoci alle coordinate ξ, η sulla base \mathbf{u}, \mathbf{v} . Anzitutto, si osserva subito

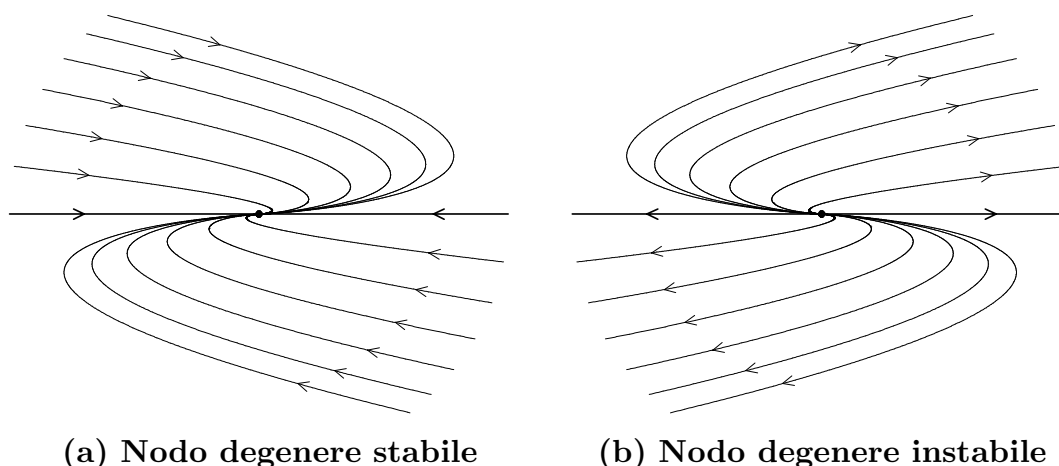


Figura 3.6. L'andamento delle orbite nel piano di fase nel caso di autovalori coincidenti, con un solo autovettore. Si dice che si ha un *nodo degenerare*.

che solo uno degli assi è invariante, e precisamente l'asse ξ (orizzontale). Per trovare le orbite corrispondenti agli altri punti del piano procediamo come per il caso di autovalori reali e distinti, cercando ancora di trovare un'equazione per le curve che non contenga il tempo. Eliminando il tempo dalle (3.34) otteniamo la relazione

$$\frac{\xi}{\xi_0} = \frac{\eta}{\eta_0} \left(1 + \frac{\eta_0}{\lambda \xi_0} \log \frac{\eta}{\eta_0} \right) ,$$

che ci dà ξ come funzione di η . Il grafico è riportato in figura 3.6, e si deve confrontare con quello del nodo, in figura 3.1. La differenza evidente sta nel fatto che è sparita la direzione eccezionale: tutte le orbite sono tangenti nell'origine all'asse ξ . In effetti, questo corrisponde al fatto che quando gli autovalori tendono ad uno stesso limite così fanno anche gli autovettori. Ciò giustifica il nome di *nodo degenerare* che viene riservato a questo caso.

Resta, come ultimo caso da discutere, quello di due autovalori nulli. Escludendo il caso in cui l'operatore A sia l'operatore nullo, dobbiamo considerare la matrice Λ che abbia la forma

$$(3.35) \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Il sistema si scriverà dunque

$$(3.36) \quad \dot{\xi} = \eta , \quad \dot{\eta} = 0 ,$$

con soluzioni

$$(3.37) \quad \xi(t) = \eta_0 t + \xi_0 , \quad \eta(t) = \eta_0 .$$

Qui, l'asse ξ degenera in punti di equilibrio, e le orbite nel piano di fase sono tutte rette parallele all'asse ξ e percorse con velocità η .

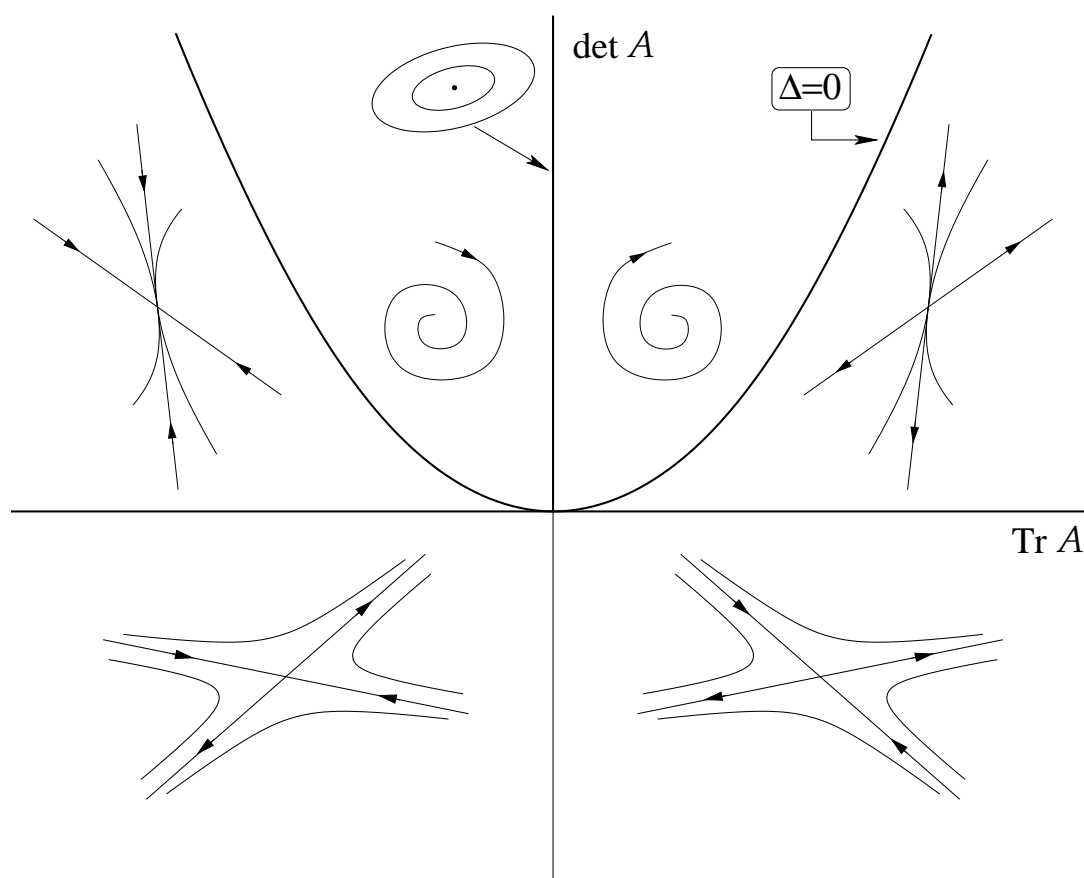


Figura 3.7. Il diagramma di biforcazione.

3.2.6 Il diagramma di biforcazione

Torniamo a rileggere l'equazione secolare (3.14) che riscriviamo assieme all'espressione del discriminante

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{Tr} A + \det A = 0, \quad \Delta = (\operatorname{Tr} A)^2 - 4 \det A.$$

È utile ed interessante riassumere tutti i risultati di questo lungo paragrafo in un solo grafico ponendo in ascisse la traccia $\operatorname{Tr} A$ dell'operatore A , ed in ordinate il suo determinante, come abbiamo fatto in figura 3.7. Il piano risulta diviso in diverse regioni dalla retta $\det A = 0$, dalla parabola $\Delta = 0$ e dalla semiretta $\operatorname{Tr} A = 0, \det A > 0$. Ognuna delle regioni aperte corrisponde ad un comportamento qualitativo ben preciso; le curve di separazione corrispondono ai casi singolari. Il grafico diventa particolarmente interessante se si considera un problema in cui l'operatore A dipenda con regolarità da un parametro. Facendo variare il parametro in maniera continua si percorre una curva nel piano, e può accadere che per certi valori critici la curva attraversi una delle rette o la parabola di separazione tra le regioni aperte. In tal caso il comportamento del sistema nell'intorno dell'equilibrio cambia repentinamente, con possibili mutamenti delle caratteristiche di stabilità dell'equilibrio. Un tal fenomeno viene detto *biforcazione*, il che giustifica il nome *diagramma di biforcazione* dato alla figura 3.7.

3.3 La forma normale per i sistemi di equazioni differenziali lineari

La discussione dei sistemi lineari in dimensione 2 appena conclusa costituisce la base su cui si fonda la discussione del caso di dimensione generica.

In questo paragrafo esponiamo in forma sintetica la teoria generale facendo uso delle forme normali di matrici comunemente studiate in geometria. Si tratta di un metodo all'apparenza diverso da quello della separazione di variabili di cui abbiamo fatto uso fin qui, ma ad esso del tutto equivalente in quanto a risultati.

3.3.1 Trasformazioni lineari

Riprendiamo la forma generale di un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

$$(3.38) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} ,$$

con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e \mathbf{A} matrice $n \times n$ reale. Consideriamo una trasformazione lineare della forma¹¹

$$(3.39) \quad \mathbf{x} = \mathbf{M}\boldsymbol{\xi} , \quad \det \mathbf{M} \neq 0 ,$$

dove \mathbf{M} è una matrice $n \times n$ non degenere. Trasformando l'equazione (3.38) si ottiene

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}\boldsymbol{\xi} ,$$

il che significa che nelle nuove coordinate ξ_1, \dots, ξ_n il sistema si scrive nella forma simile a quella di partenza

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\xi} , \quad \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} .$$

La trasformazione diventa utile se si può scegliere la matrice di trasformazione \mathbf{M} in modo che la matrice $\boldsymbol{\Lambda}$ del sistema trasformato abbia la forma più semplice possibile, ed in questo senso il sistema di equazioni sarà ridotto alla sua *forma normale*.

3.3.2 Autovalori, autovettori e diagonalizzazione

Il primo tentativo, magari ingenuo, è praticamente obbligato: si cerca una matrice di trasformazione \mathbf{M} tale che $\boldsymbol{\Lambda}$ abbia la forma diagonale, ossia $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono numeri complessi. Moltiplicando a sinistra per \mathbf{M} la relazione $\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$ troviamo $\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{M}\boldsymbol{\Lambda}$. Scrivendo esplicitamente quest'ultima relazione per le colonne della matrice \mathbf{M} ed assumendo che $\boldsymbol{\Lambda}$ sia diagonale si ricava subito che le colonne di \mathbf{M} devono obbedire all'equazione agli autovalori.

$$(3.40) \quad \mathbf{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w} .$$

¹¹ È noto dalla geometria che se si cambia la base su cui vengono scritte le coordinate dei vettori si deve effettuare una trasformazione lineare del tipo qui considerato. La matrice di trasformazione si scrive allineando in colonna le componenti dei vettori della nuova base sulla base vecchia.

Riscriviamo quest'ultima equazione nella forma più comoda

$$(3.41) \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{w} = 0 ,$$

dove \mathbf{I} è l'operatore identità, $\mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x} \forall \mathbf{x}$. Perché esistano soluzioni non banali dev'essere

$$(3.42) \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 ,$$

che, ricordando la rappresentazione matriciale (??) di \mathbf{A} , può risciversi nella forma

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0 .$$

Scrivendo esplicitamente l'espressione del determinante ci si riconduce ad un'equazione algebrica della forma

$$P_n(\lambda) = p_n \lambda^n + p_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + p_0 = 0 ,$$

con coefficienti p_0, \dots, p_n reali. Il polinomio $P_n(\lambda)$ viene detto *polinomio caratteristico*, ed all'equazione (3.42) viene dato il nome di *equazione caratteristica* o *equazione secolare*.

Il teorema fondamentale dell'algebra assicura che l'equazione secolare ammette sempre n soluzioni nel campo complesso, ove si tenga conto della molteplicità; dunque la matrice \mathbf{A} ammette sempre n autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, in generale complessi. Ricordiamo anche una proprietà che abbiamo già visto nel paragrafo 3.2.4: se $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore allora anche il suo complesso coniugato λ^* lo è; ciò perché i coefficienti del polinomio caratteristico sono reali. La ricerca delle soluzioni non è sempre agevole, ma ai fini delle applicazioni è lecito ricorrere a metodi numerici.

Una volta determinati gli autovalori si può procedere alla ricerca degli autovettori corrispondenti $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ risolvendo l'equazione (3.40) con uno dei metodi algebrici noti. Anche qui, nelle applicazioni pratiche si ricorre alla soluzione numerica. Il fatto interessante è che *se gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono distinti allora gli autovettori $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ sono linearmente indipendenti*.¹² Ciò basta per concludere che gli autovettori costituiscono una base di \mathbb{C}^n , e che su tale base la matrice $\mathbf{\Lambda}$ assume una forma diagonale. Abbiamo così dimostrato la

¹² Si procede per induzione. Se si prende un solo autovalore λ_1 con l'autovettore corrispondente \mathbf{w}_1 l'affermazione è banalmente vera. Supponiamo che sia vera per gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$ ed i corrispondenti autovettori $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{m-1}$, e, per contraddizione, supponiamo che $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ siano linearmente dipendenti, sicché abbiamo $\mathbf{w}_m = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j \mathbf{w}_j$ con $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ non tutti nulli. Allora $\mathbf{A}\mathbf{w}_m - \lambda_m \mathbf{w}_m = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_m) \mathbf{w}_j = 0$, e poiché $\lambda_j - \lambda_m \neq 0$, essendo gli autovalori distinti, ne seguirebbe che $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{m-1}$ non sono linearmente indipendenti. Questo contraddice l'ipotesi induttiva, sicché dobbiamo concludere che $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ sono linearmente indipendenti. Ciò vale per $m = 1, \dots, n$, il che dimostra l'asserto.

Proposizione 3.1: Sia data l'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ con \mathbf{A} matrice reale, e supponiamo che gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ della matrice \mathbf{A} siano distinti. Allora esiste una trasformazione lineare $\mathbf{x} = \mathbf{M}\boldsymbol{\xi}$ che pone l'equazione nella forma normale

$$(3.43) \quad \dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

con $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^n$ e con $\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$. La matrice \mathbf{M} ha la forma

$$\mathbf{M} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$$

determinata allineando in colonna gli autovettori della matrice \mathbf{A} , nello stesso ordine dato agli autovalori.

Nel caso di autovalori coincidenti non è possibile in generale dare alla matrice una forma diagonale, e si deve far ricorso alla forma canonica di Jordan. In queste note non ci soffermeremo su questi casi, per i quali rimandiamo ai trattati sulle equazioni differenziali o ai testi di Geometria.

3.3.3 Non unicità del procedimento di diagonalizzazione

La matrice trasformazione \mathbf{M} non è determinata in modo univoco. In effetti occorre tener conto che gli autovettori sono determinati a meno di un fattore moltiplicativo. Ciò si riconduce ad affermare che se valgono contemporaneamente le relazioni $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \boldsymbol{\Lambda}$ e $\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\Lambda}$ allora si ha

$$(3.44) \quad \tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$$

con d_1, \dots, d_n reali non nulli.

3.3.4 La scrittura delle soluzioni

La scrittura delle soluzioni per il sistema in forma normale è questione elementare. Grazie alla forma diagonale della matrice il sistema si separa in n equazioni distinte in \mathbb{C} della forma $\dot{\xi}_j = \lambda_j \xi_j$, la cui soluzione ben nota è $\xi_j(t) = \xi_{j,0} e^{\lambda_j t}$, essendo $\xi_{j,0}$ il dato iniziale. Noi però siamo interessati all'equazione (3.38) nelle variabili \mathbf{x} originarie, il che ci costringe anche a vedere come si possano ricondurre le soluzioni complesse della forma normale a quelle reali dell'equazione da cui è iniziato il nostro studio.

Un procedimento elegante consiste nel dare una forma esplicita al flusso ϕ^t al tempo t sotto forma di un operatore lineare $\mathbf{U}(t)$, e costruirne la matrice nelle coordinate \mathbf{x} . A tal fine si procede ad uno sviluppo delle soluzioni in serie di potenze del tempo nel modo seguente.¹³ Partendo dall'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ si calcolano le derivate

¹³ Il metodo che esponiamo qui si generalizza nel formalismo delle serie di Lie, di cui non ci occuperemo in queste note.

successive di $\mathbf{x}(t)$ procedendo in modo ricorrente, e troviamo

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}^2 \mathbf{x}, \\ \frac{d^3 \mathbf{x}}{dt^3} &= \frac{d}{dt} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \mathbf{A}^2 \mathbf{x} = \mathbf{A}^2 \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}^3 \mathbf{x}, \\ &\vdots \\ \frac{d^k \mathbf{x}}{dt^k} &= \frac{d}{dt} \frac{d^{k-1} \mathbf{x}}{dt^{k-1}} = \frac{d}{dt} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{k-1} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}^k \mathbf{x}, \\ &\vdots\end{aligned}$$

Possiamo dunque immaginare di scrivere la soluzione come serie

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \frac{t^2}{2!}\mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 + \dots + \frac{t^k}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 + \dots$$

Naturalmente si pone il problema della convergenza di questa serie, ma si tratta di faccenda di poco più complicata di quella che abbiamo trattato nel paragrafo 2.4.7, quando abbiamo dato la dimostrazione del teorema di esistenza ed unicità di Cauchy nel caso analitico.¹⁴

Riscriviamo la soluzione nella forma

$$(3.45) \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{U}(t) = \exp(t\mathbf{A}) = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k \mathbf{A}^k}{k!}.$$

Qui si vede come si possa descrivere il flusso come l'azione di un *operatore di evoluzione temporale* $\mathbf{U}(t)$ applicato al dato iniziale.

La formulazione è elegante, ma lascia aperta una questione: come si possa scrivere l'esponenziale della matrice \mathbf{A} . La risposta passa per la forma normale che abbiamo costruito.

Proposizione 3.2: *Nelle ipotesi della proposizione 3.1 la soluzione dell'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ corrispondente al dato iniziale \mathbf{x}_0 si scrive*

$$(3.46) \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{U}(t) = \mathbf{M} \exp(t\mathbf{\Lambda}) \mathbf{M}^{-1}$$

dove $\exp(t\mathbf{\Lambda}) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ è una matrice diagonale e $\mathbf{U}(t)$ è una matrice reale.

Dimostrazione. Si tratta di riprendere la (3.45) e mostrare che $\exp(t\mathbf{A}) = \mathbf{M} \exp(t\mathbf{\Lambda}) \mathbf{M}^{-1}$, aggiungendo l'osservazione che $\exp(t\mathbf{A})$, pr come è definita, è evidentemente una matrice reale. Riscriviamo la soluzione nelle coordinate $\boldsymbol{\xi}$ della forma

¹⁴ Il lettore potrà anche ricavare direttamente una dimostrazione seguendo questa traccia. Si osserva anzitutto che esiste una costante positiva a tale che $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq a\|\mathbf{x}\|$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Allora vale anche $\|\mathbf{A}^k \mathbf{x}\| \leq a^k \|\mathbf{x}\|$, e si conclude che la serie che definisce $\mathbf{x}(t)$ è maggiorata dalla serie a termini positivi $\sum_{k \geq 0} \frac{t^k a^k}{k!} \|\mathbf{x}_0\| = e^{at} \|\mathbf{x}_0\|$. Questo garantisce che la serie converge per tutti i valori di $t \in \mathbb{R}$.

normale come $\xi(t) = \exp(t\Lambda)\xi_0$ dove ξ_0 è il dato iniziale. Grazie alla forma diagonale di Λ calcoliamo facilmente che $\Lambda^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$, e dunque abbiamo

$$\exp(t\Lambda) = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k \Lambda^k}{k!} = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) .$$

Mostriamo ora che $\exp(tA) = M \exp(t\Lambda) M^{-1}$. A tal fine dobbiamo riscrivere la relazione $M^{-1}AM = \Lambda$ come $A = M\Lambda M^{-1}$ e verificare che $A^k = M\Lambda^k M^{-1}$. Procediamo per induzione. Per $k = 0$ abbiamo $A^0 = I$ e $M\Lambda^0 M^{-1} = MIM^{-1} = I$, e quindi l'eguaglianza è banalmente vera. Supponiamola vera fino a $k - 1$ e calcoliamo

$$A^k = AA^{k-1} = (M\Lambda M^{-1})(M\Lambda^{k-1} M^{-1}) = M\Lambda^k M^{-1} .$$

Basta infine calcolare

$$\exp(tA) = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k M\Lambda^k M^{-1}}{k!} = M \left(\sum_{k \geq 0} \frac{t^k \Lambda^k}{k!} \right) M^{-1} = M \exp(t\Lambda) M^{-1}$$

come affermato.

Q.E.D.

3.3.5 Forma normale reale nel caso di autovalori complessi

Nel paragrafo 3.2.4 abbiamo visto come il procedimento di diagonalizzazione del sistema lineare permetta in ogni caso di scrivere le soluzioni in forma reale, anche quando la forma normale diagonalizzata ci costringa a passare al complesso. Vediamo qui come in tali casi si possa anche introdurre una forma normale reale, sia pure non diagonale.

Sempre assumendo che gli autovalori della matrice A del sistema lineare siano distinti, supponiamo che essi non siano reali. Abbiamo già osservato che in tal caso, in conseguenza del fatto che A è una matrice reale, se $\lambda = \mu + i\omega$ è un autovalore allora anche $\lambda^* = \mu - i\omega$ lo è.

Lemma 3.3: *Sia $\lambda = \mu + i\omega$ con $\omega \neq 0$ un autovalore complesso della matrice reale A , e sia $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$, con \mathbf{u}, \mathbf{v} vettori reali, l'autovettore corrispondente a λ , sicché vale $A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$. Allora valgono le proprietà seguenti.*

- (i) $\mathbf{w}^* = \mathbf{u} - i\mathbf{v}$ è l'autovettore corrispondente all'autovettore λ^* , ossia vale anche $A\mathbf{w}^* = \lambda^*\mathbf{w}^*$.
- (ii) I vettori reali \mathbf{u} e \mathbf{v} sono linearmente indipendenti.
- (iii) Valgono le proprietà

$$A\mathbf{u} = \mu\mathbf{u} - \omega\mathbf{v} , \quad A\mathbf{v} = \mu\mathbf{v} + \omega\mathbf{u} .$$

Il contenuto di questo lemma non fa che richiamare quello che abbiamo già visto e dimostrato nel paragrafo 3.2.4. Inoltre se ripercorriamo quel paragrafo e prestiamo particolare attenzione alla forma (3.28) possiamo riformulare il risultato come segue. Nel caso $n = 2$, definendo la matrice di trasformazione

$$(3.47) \quad M = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

ottenuta allineando in colonna i due vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} , abbiamo

$$(3.48) \quad \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mu & \omega \\ -\omega & \mu \end{pmatrix}$$

Ciò si verifica facilmente perché è solo un modo diverso di scrivere le relazioni (iii) del lemma 3.3.

Torniamo ora al caso generale, sempre assumendo che gli autovalori di \mathbf{A} siano distinti. Quanto abbiamo visto ci permette di affermare *ad ogni coppia di autovalori λ, λ^* complessi coniugati corrisponde un piano sul quale le equazioni lineari possono assumere la forma normale reale data dalla matrice a secondo membro della (3.48)*. L'argomento si applica tale e quale anche al caso di un coppia di autovalori $i\omega, -i\omega$ immaginari puri: è sufficiente porre $\mu = 0$.

3.3.6 Forma normale nel caso di autovalori distinti

Raccogliendo i risultati che abbiamo visto fin qui possiamo enunciare la seguente

Proposizione 3.4: *Sia \mathbf{A} matrice reale $n \times n$, e supponiamo che essa ammetta k autovalori reali e distinti e $2m = n - k$ autovalori a coppie complessi coniugati a due a due distinti, che scriviamo nell'ordine*

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1 + i\omega_1, \mu_1 - i\omega_1, \dots, \mu_m + i\omega_m, \mu_m - i\omega_m$$

Allora esiste una matrice \mathbf{T} non degenera che trasforma il sistema nella forma normale reale con matrice

$$(3.49) \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mu_1 & \omega_1 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\omega_1 & \mu_1 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \mu_m & \omega_m \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -\omega_m & \mu_m \end{pmatrix}$$

La matrice \mathbf{T} ha la forma

$$\mathbf{T} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m)$$

costruita accostando in colonna gli autovettori $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ corrispondenti ai k autovalori reali e le coppie $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m$ formate dalle parti reali ed immaginarie delle m coppie di autovalori complessi coniugati, nello stesso ordine dato agli autovalori.

La dimostrazione si riduce ormai solo alla verifica che l'enunciato altro non è che la sintesi di tutto quanto abbiamo visto in questo paragrafo. Al lettore il compito di convincersene completamente.

Riflettiamo un momento sulla rappresentazione del flusso che emerge dall'ultima proposizione. Supponiamo che l'equazione secolare abbia m_+ autovalori reali e positivi, m_- autovalori reali e negativi, e $2m_c$ autovalori complessi, che compaiono a coppie; naturalmente, dalle ipotesi che abbiamo fatto segue $m_+ + m_- + 2m_c = n$. Allora possiamo rappresentarci lo spazio \mathbb{R}^n come prodotto diretto di diversi sottospazi.

- (i) Un sottospazio di dimensione m_+ , invariante per il flusso, generato dagli autovettori con autovalore reale positivo; su questo sottospazio tutte le orbite sono asintotiche all'origine per $t \rightarrow -\infty$ e tendono all'infinito per $t \rightarrow +\infty$. Il comportamento delle orbite è quello di un nodo instabile.
- (ii) Un sottospazio di dimensione m_- , anch'esso invariante per il flusso, generato dagli autovettori con autovalore reale negativo; su questo sottospazio tutte le orbite provengono dall'infinito per $t \rightarrow -\infty$ e sono asintotiche all'origine per $t \rightarrow +\infty$. Il comportamento delle orbite è quello di un nodo stabile.
- (iii) m_c piani, ciascuno dei quali corrisponde ad una coppia di autovalori complessi coniugati, su ciascuno dei quali le orbite hanno il comportamento di un fuoco o di un centro.

Per tutte le orbite che hanno punto iniziale al di fuori di questi sottospazi la dinamica si ricostruisce combinando vettorialmente il moto su ciascuno dei sottospazi che abbiamo classificato.

Questa descrizione copre la maggioranza dei casi significativi. Nel caso generale di autovalori multipli si può ancora ricorrere alla forma normale, cercando una base sulla quale la matrice del sistema lineare assuma la cosiddetta *forma canonica di Jordan*. Per una discussione approfondita rimandiamo ai testi di Geometria, oppure al libro di Hirsch–Smale.^[25]

3.4 Cenni al problema della stabilità degli equilibri

La conoscenza delle soluzioni di equilibrio diventa interessante dal punto di vista dinamico quando si sappiano trarre conclusioni sulla loro stabilità. Detto in termini molto rozzi, ci si chiede se le orbite con dato iniziale prossimo ad un equilibrio vi restino indefinitamente vicine, o se possano sfuggirne via. Questo comportamento si formalizza mediante la nozione di *stabilità alla Lyapounov*.

3.4.1 Diverse definizioni di stabilità

Conviene dir subito che il concetto di stabilità non è definito in modo univoco: già nel caso di un punto di equilibrio si possono dare definizioni diverse, che tengono conto di situazioni od obiettivi diversi. La prima definizione, in un certo senso la più spontanea, è illustrata in figura 3.8: si tratta semplicemente di dare una veste formale precisa all'espressione “si rimane vicini quanto si vuole, a patto di partire abbastanza vicini”.

Definizione 3.5: *Un punto di equilibrio \bar{x} dell'equazione differenziale $\dot{x} = f(x)$ si dice stabile se per ogni intorno U di \bar{x} esiste un secondo intorno V tale che ogni movimento con dato iniziale in V resta in U per tutti i tempi.*

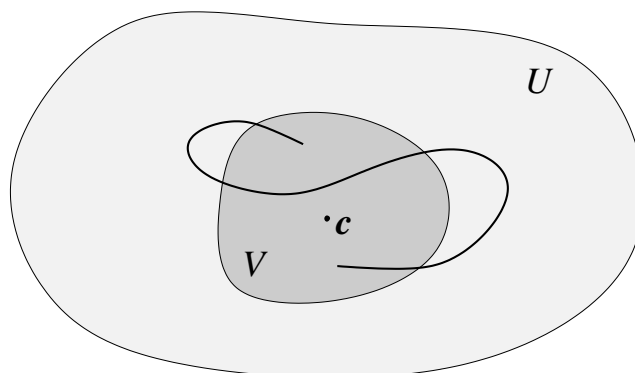


Figura 3.8. La definizione di stabilità per un punto di equilibrio.

Si parla in questo caso di *stabilità perpetua*. Alla definizione che abbiamo appena dato si associa la

Definizione 3.6: *Un punto di equilibrio si dice instabile se non è stabile.*

Si osservi bene che, per quanto quest'ultima definizione possa apparire ovvia, essa non comporta che tutte le orbite sfuggano dal punto di equilibrio: basta che ne sfugga una sola.

La definizione di stabilità data sopra risulta immediatamente troppo restrittiva. In effetti, anche considerando un sistema lineare nel piano — che abbiamo discusso in tutti i dettagli — si vede bene che il solo caso che rientra nella definizione è quello del centro. Come dire, un caso del tutto singolare.

Una definizione meno restrittiva è quella di *stabilità nel passato o nel futuro*:

Definizione 3.7: *Un punto di equilibrio \bar{x} si dice stabile nel futuro (risp. nel passato) se per ogni intorno U di \bar{x} esiste un secondo intorno V tale che ogni movimento con dato iniziale in V resta in U per tutti i tempi positivi (risp. negativi).*

Nel caso delle equazioni lineari nel piano questa definizione risulta essere significativa, in quanto esclude in pratica solo i punti di sella. Non è però esente da difetti: si ignora completamente il comportamento asintotico del movimento. A ciò si rimedia introducendo il concetto di *stabilità asintotica*:

Definizione 3.8: *Un punto di equilibrio \bar{x} si dice asintoticamente stabile nel futuro (risp. nel passato) se*

- (i) *è stabile nel futuro (risp. nel passato), e*
- (ii) *esiste un intorno V^* tale che per ogni dato iniziale in V^* il movimento tende a \bar{x} per $t \rightarrow +\infty$ (risp. $t \rightarrow -\infty$).*

Si riconosce in questa definizione il comportamento asintotico dei punti di nodo e di fuoco.

3.4.2 Variabili dinamiche e derivata di Lie

Ai fini dello studio della stabilità si rivela alquanto utile il concetto di *variabile dinamica*. Svilupperemo a lungo questo punto nel prossimo capitolo, soprattutto quando discuteremo della conservazione dell'energia in sistemi meccanici. Conviene però in-

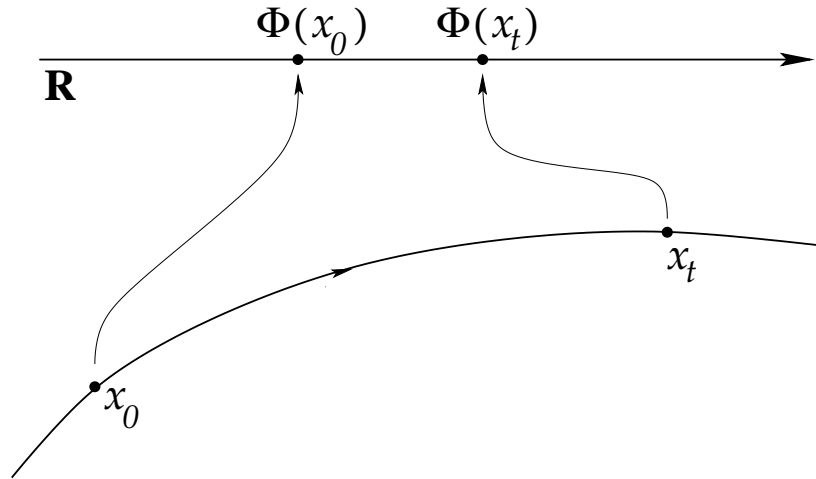


Figura 3.9. Ad illustrazione della definizione di variabile dinamica.

trodurre fin d'ora alcune nozioni essenziali, che ci permettono di enunciare il teorema di Lyapounov sulla stabilità.

Chiameremo *variabile dinamica* una funzione $\Phi(x) : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ definita sullo spazio delle fasi ed a valori reali. Assumeremo che la funzione sia almeno di classe C^1 .

L'aggettivo *dinamica* si riferisce al fatto che una tale funzione genera in modo automatico una funzione $\tilde{\Phi}$ del tempo, ove si tenga conto della dinamica del sistema stesso. Il procedimento è illustrato in figura 3.9.¹⁵ Si considera il flusso indotto da un campo vettoriale $f(x)$, che trasporta un dato punto x_0 , preso come punto iniziale, nel punto x_t al tempo t . Si definisce poi la funzione del tempo $\tilde{\Phi}(t) = \Phi(x_t)$ assegnandole al tempo t il valore di $\Phi(x)$ nel punto x_t . Se il movimento x_t è funzione differenziabile del tempo, e $\Phi(x)$ è funzione anch'essa differenziabile, allora la funzione composta $\tilde{\Phi}(t)$ è a sua volta differenziabile, ed ha senso calcolarne la derivata temporale $\frac{d\tilde{\Phi}}{dt}$. Il fatto interessante è che con questo si definisce un operatore lineare L_f che associa alla funzione Φ la sua derivata temporale lungo il flusso indotto dal campo vettoriale f , ossia

$$(3.50) \quad L_f \Phi(x) = \left. \frac{d}{dt} \Phi(x_t) \right|_{t=0}.$$

All'operatore L_f si dà il nome di *derivata di Lie*.¹⁶ Se sono state introdotte delle coordinate (x_1, \dots, x_n) sullo spazio delle fasi allora la derivata di Lie assume la forma

¹⁵ Il termine un po' asettico *variabile dinamica* trova riscontro nel linguaggio della Fisica quando si pensa alle cosiddette *osservabili*, ossia grandezze che si possono misurare. Esempi di questo tipo sono l'energia cinetica e/o potenziale, la quantità di moto, il momento della quantità di moto, &c. Tutte queste grandezze vengono espresse come funzioni dello stato del sistema, ossia della posizione e velocità di tutti i componenti il sistema stesso.

¹⁶ Marius Sophus Lie, nato a Nordfjordeide, Norvegia, 17 dicembre 1842; morto a Kristiania, l'attuale Oslo, 18 febbraio 1899.

di un operatore che assegna ad una variabile dinamica la sua derivata nella direzione del campo vettoriale, e si scrive

$$(3.51) \quad L_f = \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial}{\partial x_j} .$$

In effetti, si tratta semplicemente della derivata di una funzione composta: se $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ dipende dalle coordinate, che a loro volta dipendono dal tempo, allora

$$\frac{d\Phi}{dt} = \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} .$$

3.4.3 Il teorema di Lyapounov

Lyapounov¹⁷ ha fatto un uso elegante delle variabili dinamiche a fine di determinare la stabilità di un equilibrio. A tal proposito, si ha il

Teorema 3.9: *Sia \bar{x} un punto di equilibrio per un sistema di equazioni differenziali $\dot{x} = f(x)$. Condizione sufficiente perché \bar{x} sia stabile nel futuro è che esista una variabile dinamica $W(x)$ di classe C^1 che in un intorno U_0 di \bar{x} soddisfi alle seguenti condizioni:*

- (i) *ha un minimo stretto in \bar{x} , ossia $W(x) > W(\bar{x}) \forall x \in U_0, x \neq \bar{x}$;*
- (ii) *la derivata di Lie di W in U_0 sia non positiva, ossia $(L_f W)(x) \leq 0 \forall x \in U$.*

Condizione sufficiente perché \bar{x} sia asintoticamente stabile nel futuro è che W soddisfi (i) e la condizione

- (iii) *$(L_f W)(x) < 0 \forall x \in U_0, x \neq \bar{x}$.*

Invertendo le disuguaglianze nelle condizioni (ii) e (iii) si ottiene un enunciato analogo per la stabilità nel passato. Per la stabilità perpetua occorre invece una condizione molto forte:

Corollario 3.10: *Condizione sufficiente perché il punto di equilibrio \bar{x} sia stabile per tutti i tempi è che la variabile dinamica $W(x)$ abbia un minimo stretto in \bar{x} , e che nell'intorno U_0 valga $L_f W = 0$.*

Vedremo nel prossimo capitolo che una siffatta condizione può verificarsi per i sistemi meccanici. Pur trattandosi di una classe eccezionale nell'insieme di tutti i possibili sistemi dinamici, si tratta comunque di un modello di estremo interesse, perché è quello che, secondo Newton, descrive il nostro universo.

Dimostrazione del teorema 3.9. Cominciamo col dimostrare la stabilità nel futuro sotto le ipotesi (i) e (ii). Dato un intorno arbitrario U di \bar{x} , esiste una sfera aperta $B \subset U_0 \cap U$ e centro \bar{x} ; ciò perché l'intersezione degli aperti U_0 ed U è un aperto. La frontiera ∂B di B è una superficie sferica, chiusa e limitata, e dunque $W(x)$ ha un minimo su di essa, che denoteremo $m = \inf_{x \in \partial B} W(x)$; per le ipotesi fatte vale $m > W(\bar{x})$. Sia ora $V = \{x \in B : W(x) < m\}$; questo è un intorno aperto di \bar{x} . Sia ora $x_0 \in V$ arbitrario, e x_t il suo evoluto ad un tempo arbitrario $t > 0$. Per l'ipotesi

¹⁷ Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, nato a Yaroslavl, Russia, 6 giugno 1857; morto a Odessa, Russia, 3 novembre 1918.

(ii) la funzione $\tilde{W}(t) = W(x_t)$ è monotona non crescente, e dunque non può essere $x_t \in \partial B$. Segue che $x_t \in B \subset U \forall t > 0$, e dunque \bar{x} è stabile nel futuro.

Veniamo ora alla stabilità asintotica nel futuro, assumendo che valga anche la condizione (iii). Consideriamo ancora il movimento x_t che ha come punto iniziale $x_0 \in V$ arbitrario. Osserviamo ancora che $\tilde{W}(t)$ è funzione monotona non crescente ed anche inferiormente limitata da $W(\bar{x})$, perché ivi ha un minimo. Dunque esiste il limite $\lambda = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{W}(t)$, ed è anche

$$(3.52) \quad \tilde{W}(t) > \lambda \geq W(\bar{x}) \quad \forall t > T.$$

Mostriamo che è necessariamente $\lambda = W(\bar{x})$. Supponiamo che ciò non sia vero, ossia che valga $\lambda > W(\bar{x})$. Allora fissato $\varepsilon > 0$ arbitrario esiste T tale che $\lambda \leq \tilde{W}(t) \leq \lambda + \varepsilon \forall t \geq T$. Detto allora $\tilde{V} = \{x \in V : \lambda \leq W(x) \leq \lambda + \varepsilon\}$, per la condizione (iii) esiste $\alpha > 0$ tale che $(L_f W)(x) \leq -\alpha < 0 \forall x \in \tilde{V}$, ossia la derivata di Lie di $W(x)$ è strettamente negativa in \tilde{V} . Ciò perché per l'ipotesi (iii) la derivata $L_f W$ può annullarsi solo nel punto \bar{x} , che per costruzione non appartiene a \tilde{V} . Ne segue che $\tilde{W}(t) < -\alpha(t - T)$ per $t > T$, e dunque per $t > T + \varepsilon/\alpha$ vale anche $\tilde{W}(t) < \lambda$. Questo contraddice la (3.52), e dunque deve essere $\lambda = W(\bar{x})$. Stabilito questo, per la continuità di $W(x)$ segue anche $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_t = \bar{x}$. Q.E.D.

3.4.4 La stabilità dei sistemi lineari

Nel caso dei sistemi lineari vale la seguente

Proposizione 3.11: *Sia data l'equazione lineare $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ in \mathbb{R}^n . L'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile nel futuro se e solo se tutti gli autovalori di \mathbf{A} hanno parte reale negativa. Se anche uno solo degli autovalori ha parte reale positiva il punto è instabile nel futuro.*

In modo analogo si dà una condizione per la stabilità asintotica nel passato: tutti gli autovalori devono avere parte reale positiva. Se anche uno solo degli autovalori ha parte reale negativa il sistema è instabile.

Per la dimostrazione di questo teorema si rimanda ai testi specialistici.

3.4.5 La stabilità dei sistemi non lineari

La stabilità dei punti di equilibrio dei sistemi non lineari è problema alquanto delicato, in generale. Si seguono tipicamente due vie. La prima consiste nell'affrontare la questione in modo diretto, ad esempio tentando di costruire un'opportuna funzione di Lyapounov. Un secondo modo consiste nel cercare di estendere al caso non lineare i risultati ottenuti per il sistema linearizzato nell'intorno dell'equilibrio. Vale a tal proposito il *I teorema di Lyapounov*, che afferma che la stabilità del sistema non lineare segue da quella del corrispondente sistema lineare nei casi contemplati dalla proposizione 3.11.

Mettiamo in rilievo il fatto che nulla si può dire riguardo alla stabilità di punti di equilibrio per i quali gli autovalori abbiano parte reale nulla.